

Stromstärke I, i und Stromdichte S (J):

$$I = \frac{Q}{t} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} \quad Q = I \cdot t \quad Q = \int i(t)dt \quad S = \frac{I}{A} \quad [S] = \left[\frac{A}{mm^2} \right]$$

Spannung U und Potential φ : $U_{12} = \varphi_1 + \varphi_2$ $U_{12} = \frac{W_{12}}{Q}$

Leistung P und Energie W:

$$P = U \cdot I \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t)dt \quad p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad P = I^2 \cdot R \quad P = \frac{U^2}{R}$$

$$\eta = \frac{P_{zu}}{P_{ab} + P_{verlust}} \quad W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t \quad W_{12} = \int_{t1}^{t2} u(t) \cdot i(t)dt$$

Ohmsches Gesetz (Ohmscher Widerstand R, elektr. Leitwert G)

$$U = I \cdot R \quad I = U \cdot \frac{1}{R} = U \cdot G \quad [G] = \left[\frac{1}{\Omega} = 1S \right] \quad (1 \text{ Siemens})$$

$$R = \frac{v \cdot l}{A} \quad v = \frac{R \cdot A}{l} \quad \kappa = v^{-1} \quad R = \frac{l}{\kappa \cdot A} \quad G = \frac{\kappa \cdot A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit von Widerständen:

$$m = \text{const} = \frac{\Delta R}{\Delta \vartheta} = \frac{R_{\vartheta} - R_{\vartheta_a}}{\vartheta - \vartheta_a} \dots [m] = \frac{\Omega}{K} \quad \frac{R_{\vartheta_1}}{R_{\vartheta_2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \alpha_{\vartheta} = \frac{1}{\tau + \vartheta} \dots \text{mit} [\vartheta] = 1^\circ C \quad \vartheta_2 = \frac{R_{\vartheta_2}}{R_{\vartheta_1} \cdot (\tau + \vartheta_1) - \tau}$$

$$\alpha_{\vartheta_a} = \frac{m}{R_{\vartheta_a}} = \frac{\Delta R}{R_{\vartheta_a} \cdot \Delta \vartheta} = \frac{1}{R_{\vartheta_a}} \cdot \frac{(R_{\vartheta} - R_{\vartheta_a})}{(\vartheta - \vartheta_a)} \dots [\alpha] = \frac{1}{K} \quad R_{\vartheta} = R_{\vartheta_a} \cdot [1 + \alpha_{\vartheta_a} \cdot (\vartheta - \vartheta_a)]$$

$$R_{\vartheta} = R_{\vartheta_a} \cdot [1 + \alpha_{\vartheta_a} \cdot (\vartheta - \vartheta_a) + \beta \cdot (\vartheta - \vartheta_a)^2] \dots [\beta] = \frac{1}{K^2}$$

Kirchhoffsche Sätze:

Knotenpunktsatz: $\sum I_{zu} = \sum I_{ab} \quad \sum_1^n I_k = 0$

Maschensatz: $\sum_1^n U_k = 0$

Reihenschaltung von Widerständen:

$$R_{ges} = \sum_1^n R_k \quad \frac{U_k}{U_{ges}} = \frac{R_k}{R_{ges}} \quad U_1 = \frac{R_1 \cdot U_{ges}}{R_{ges}}$$

Parallelschaltung von Widerständen:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_1^n \frac{1}{R_k} \quad G_{ges} = \sum_1^n G_k \quad R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2} \quad \frac{I_1}{I_{ges}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad I_1 = \frac{I_{ges} \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{I_2}{I_{ges}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad I_2 = \frac{I_{ges} \cdot R_1}{R_1 + R_2}$$

Parallelschaltung von n gleich großen Widerständen: $R_{ges} = \frac{R}{n}$

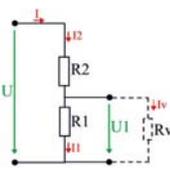
Zweipolquellen:

Innenwiderstand: $U_{ab} = U_q - I \cdot R_i$

- a) Leerlauf: $I = 0 \Rightarrow U_{ab} = U_q$
- b) Kurzschluss: $R_v = 0 \Rightarrow U_{ab} = 0 \Rightarrow I_k = \frac{U_q}{R_i}$
- c) Belastung: $U_{ab} = U_q - I \cdot R_i$

- Schaltungen:
- a) Summenreihenschaltung: $U_{qges} = \sum_1^n U_{qk} \quad R_{ges} = \sum_1^n R_{ik}$
 - b) Gegenreihenschaltung: $U_{qges} = -U_{q1} + U_{q2} \quad R_{ges} = R_{11} + R_{12}$
 - c) Parallelschaltung: $R_{ges} = \frac{R_i}{n}$

Spannungsteiler:



a) Leerlauf: $U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

b) Belastung mit R_v : $R_{ges} = R_2 + R_v = R_2 + \frac{R_1 R_v}{R_1 + R_v}$

$$\frac{U_v}{U} = \frac{R_e}{R_{ges}} = \frac{R_e}{R_2 + R_e} = \frac{\frac{R_1 R_v}{R_1 + R_v}}{R_2 + \frac{R_1 R_v}{R_1 + R_v}} = \frac{R_1 R_v}{R_1 R_v + R_2 (R_1 + R_v)}$$

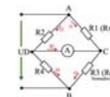
c) Ströme:

α) Leerlauf: $R_v \rightarrow \infty \Rightarrow I = I_2 = I_1 = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2}$

β) Belastung mit R_v : $I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_2 + R_e} = I_2 \quad I_1 = I \cdot \frac{R_v}{R_1 + R_v} \quad I_v = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_v}$

γ) Kurzschluss: $R_v = 0 \Rightarrow I_k = I_2 = I_v = \frac{U}{R_2}$

Die Wheatsonbrücke:

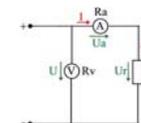
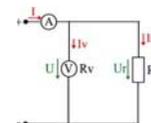


$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \quad R_1 = R_3 \frac{R_2}{R_4} \quad \text{bzw.} \quad R_x = R_n \frac{R_2}{R_4}$$

Widerstandsbestimmung durch Strom- und Spannungsmessung:

Spannungsrichtige Schaltung

Stromrichtige Schaltung



Gemessene Spannung: $U = U_R$

Gemessener Strom: $I = I_R + I_V$

$$R' = \frac{U}{I} = \frac{U_R}{I_R + I_V} < \frac{U_R}{I_R} = R$$

oder $R' = \frac{U}{I} = R \cdot \frac{R_V}{R + R_V}$

Kleiner Messfehler, wenn $R \ll R_V$
Bei Messung kleiner Wid.

Gemessene Spannung: $U = U_R + U_A$

Gemessener Strom: $I = I_R$

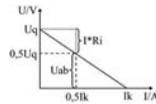
$$R' = \frac{U}{I} = \frac{U_R + U_A}{I_R} = R + R_A > R$$

Kleiner Messfehler, wenn $R \gg R_A$
Bei Messung großer Wid.

Leistungsanpassung:

$$R_V = R_i \Rightarrow P_{V,max} = \frac{U_q \cdot I_K}{2} = \frac{U^2}{4 \cdot R_i}$$

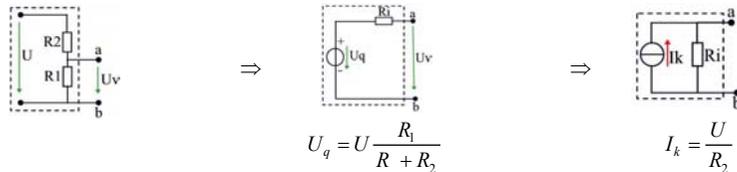
$$\eta = 50\%$$



Ersatzzweipolquellen:

Widerstände, die in Reihe mit einer Stromquelle sind können überbrückt werde.

Widerstände, parallel mit einer Spannungsquelle können aufgetrennt werde.



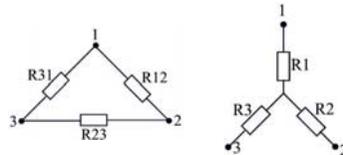
Netzwerkberechnung mit Hilfe der Kirchhoffschen Sätze:

- 1.) Sämtliche Stromquellen in äußere Einspeisungen umwandeln (Bis zum KNP auftrennen)
- 2.) Zählpfeile eintragen (Richtung beliebig)
- 3.) Umlaufsinn der Maschen eintragen
- 4.) Aufstellen der Maschengleichungen mittels „Elementarmaschen“
- 5.) So viele Knotenpunktgleichungen aufstellen, wie zur Berechnung der unbekanntenen Ströme notwendig sind
- 6.) Gleichungen „ordnen“, Einheiten beseitigen

Netzumwandlung:

Widerstandsdrück in Widerstandstern

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$



Widerstandstern in Widerstandsdrück

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_3}; R_{23} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_1}; R_{31} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

Überlagerungsmethode:

- a) Bis auf eine Quelle alle Spannungs- und Stromquellen kurzschließen bzw. überbrücken (R_i bleibt erhalten!)
- b) R_{ges} und Teilströme $I'(I'', I''', \dots)$ berechnen

- c) Teilströme vorzeichenrichtig (!) überlagern
- d) Gesamtstrom = Summe aller (vorzeichenrichtiger(!)) Teilströme

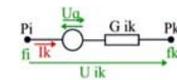
Maschenstromverfahren:

- a) Stromquellen beseitigen (bis zum KNP auftrennen)
- b) Zweigströme eintragen (Richtung beliebig)
- c) Aufzeichnen des Graphen und eintragen eines vollständigen Baumes (Zweige ohne Bauteile müssen auf dem Baum liegen)
- d) Eintragen der Maschenströme I_1' bis I_m' zweckmäßigerweise in Richtung des Zweigstromes im unabhängigen Zweig
- e) Aufstellen der m Maschengleichungen ($m=n-(p-1)$) für die Maschenströme. Die positive Zählrichtung wird dabei durch den jeweiligen Maschenstrom bestimmt. Das Vorzeichen der Kopplungswid. ist somit negativ, wenn die Maschenströme entgegengesetzte Zählrichtung haben. Das Vorzeichen der Quellspannung ist negativ, wenn die Richtung der Quellspg. entgegen der Zählrichtung des Maschenstromes der Masche ist. Die äußeren Belastungen gehen über den Baum.

Bsp.: $\underbrace{M1}_{\text{Maschengleichung}} : \underbrace{(R_1 + R_2 + \dots)}_{\text{Gesamtwid. der Maschen}} I_1' \pm \underbrace{R_3 I_2'}_{\text{Kopplungswid.}} \pm \underbrace{R_3 I_3'}_{\text{Äußere Belastung}} \pm \underbrace{U_{q1}}_{\text{Quellspg.}} = 0$

- f) Durch Auflösen der m Maschengleichungen ergeben sich die Maschenströme
- g) Die Zweigströme ergeben sich durch die Überlagerung der Maschenströme

Knotenpotentialverfahren:



$$U_{ik} = \varphi_i - \varphi_k = I_{ik} \cdot R_{ik} - U_q$$

$$\Rightarrow I_{ik} = (\varphi_i - \varphi_k \pm U_q) \cdot G_{ik}$$

- a) Das Potential eines willkürlichen KNP wird „Null“ gesetzt.
- b) Es werden p-1 KNP-Sätze angewendet (z.B.: $P_1 : I_a + I_1 - I_4 = 0$)
- c) Ersetzen der Zweigströme durch die Potentiale, Quellspg. u. Leitwerte (z.B.: $I_1 = (\varphi_2 - \varphi_1 + U_{q1}) \cdot G_1$)
- d) Einsetzen der Gleichungen in b) (z.B.: $I_a + (\varphi_2 - \varphi_1 + U_{q1})G_1 - (\varphi_1 - \varphi_0 + U_{q4})G_4 = 0$)
- e) Auflösen des GS nach φ_n in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_b + U_{q1} \cdot G_1 \\ I_d - I_c + U_{q2} \cdot G_2 \end{bmatrix}$$

Leitwertmatrix Matrix Der Knotenpotentiale KNPbelastungsströme und Quellspg.

Elektrostatisches Feld

Coloumsches Gesetz: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ $[F] = [N]$ (F ist die Feldkraft auf eine punktförmige Ladung Q)

Elektrische Feldstärke: $E = \frac{F}{Q}$ $[E] = \left[\frac{Ws}{As} = \frac{m}{As} = \frac{AVs}{As} = \frac{V}{m} \right]$ $F = Q \cdot E$

Die Richtung der elektr. Feldstärke ist gleich der Richtung der Kraft auf eine ruhende pos. Ladung.

Spannung und Potential: Wird eine Ladung Q um den Weg s im elektrost. Feld verschoben, so ergibt sich:

- a) bei $\alpha = 0^\circ : \cos \alpha = 1 \Rightarrow W = Q \cdot E \cdot s \wedge W = Q \cdot U \quad U = \frac{E}{s}$ bzw. $E = \frac{U}{s}$
- b) α beliebig, $E = konst. \therefore U = E \cdot s \cdot \cos \alpha$
- c) α beliebig, E beliebig: $U_{12} = \int_1^2 E \cos(\alpha) ds$
- d) $\alpha = 90^\circ$, E beliebig: $\cos \alpha = 0 \Rightarrow W = 0$

Ermittlung der elektrischen Feldstärke aus der Potentialverteilung: $E = \frac{\Delta \varphi}{\Delta n}$ $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ (Potentiale der Äquipotentiallinien); Δn (Normalenabstand der Äquipotentiallinien)

Potential und Spannung: $\varphi_p = \varphi_0 - \int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi_0 - U_{0p}$

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{s} + \int_{\infty}^2 \vec{E} d\vec{s} = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{s} - \int_2^{\infty} \vec{E} d\vec{s} = \varphi_1 - \varphi_2$$
 Spannungsangabe

ist nur zwischen zwei Punkten möglich, Potentialangabe ist für einen Punkt möglich, jedoch ist ein

Bezugspunkt nötig $\varphi_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ (Potential des Punktes a, wobei $\varphi = 0$ im ∞).

Erforderlicher Arbeitsaufwand bei der Verschiebung einer Ladung von a nach b und zurück: $W = \oint \vec{E} d\vec{s} = 0$

Verschiebungsdichte: $D = \epsilon \cdot E$ mit $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ (Influenz- bzw. Dielektrizitätskonst.)

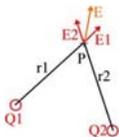
Berechnung elektrostatischer Felder:
Kugelsymmetrisches Feld:



$$\psi_e = Q = \oint \vec{D} d\vec{A} = D \oint dA = D 4\pi r^2 \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{mit } D = \epsilon \cdot E \text{ folgt:}$$

Berechnung der elektr. Feldstärke in einem beliebigen Raumpunkt die durch 2 Punktladungen bewirkt wird:



$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon r_1^2} \quad E_2 = \frac{Q_2}{4\pi \epsilon r_2^2}$$

Anwendung des Überlagerungsprinzips: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ Geom. Add.

Bei mehreren Punktladungen gilt: $\vec{E} = \sum_1^n \vec{E}_k$

Zylindersymmetrisches Feld: Annahme: $l \gg r$
 $\psi_e = Q = \oint \vec{D} d\vec{A} = \underbrace{\int D dA}_{\text{Stirnflächen}} + \underbrace{\int D dA}_{\text{Mantelflächen}}$, da $l \gg r$, dürfen Stirnflächen vernachlässigt werden

$$Q = \int D dA = D \int dA = D 2\pi r l \quad D = \frac{Q}{2\pi r l} \sim \frac{1}{r}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l} \sim \frac{1}{r} \quad \text{mit der Linienladungsdichte } \lambda = \frac{Q}{l} \text{ gilt auch } E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r}$$

Berechnung des Pot. eines Pkt. im Abstand r von einer Punktladung Q gegen einen Pkt:

$$\varphi_p = \int_{r_0}^r \vec{E} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Potential in der Nähe von 2 Punktladungen:

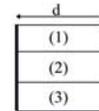
$$\varphi_{1/2} = \frac{Q_{1/2}}{4\pi \epsilon r_{1/2}} \quad \text{Überlagern ergibt } \varphi_p = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ (algebraische Addition)}$$

Berechnung des Potentials eines Pkt im Abstand r von einer Linienladung gegen einen Bezugspkt. im Abstand r0:

$$\varphi_p = \varphi_0 - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \text{Für die Spg. gilt } U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Schichtdielektrikum:

Schichtung parallel zur Feldrichtung: $E = konst.$



$$U = E_1 d = E_2 d = E_3 d \Rightarrow E_1 = E_2 = E_3$$

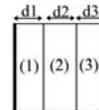
$$D = \epsilon E \quad D_1 = \epsilon_1 E \quad D_2 = \epsilon_2 E \quad D_3 = \epsilon_3 E$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \frac{D_1}{D_3} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3}$$



$$U_q = E \cdot d = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \cdot d = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \cdot d = \frac{D_3}{\epsilon_0 \epsilon_{r3}} \cdot d \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = D_1 \cdot A_1 + D_2 \cdot A_2 + D_3 \cdot A_3 = C_{ges} \cdot U_q$$

Schichtung senkrecht zur Feldrichtung: $D = konst.$



Bei konst. Querschnitten folgt:

$$\frac{\psi_e}{A} = \frac{Q}{A} = \frac{\psi_{e1}}{A} = \frac{\psi_{e2}}{A} = \frac{\psi_{e3}}{A} = D = D_1 = D_2 = D_3$$

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} \quad E_3 = \frac{D}{\epsilon_3} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$



$$U_q = E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3 = \frac{D}{\epsilon_0} \left(\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\epsilon_{r3}} \right) \quad Q = D \cdot A = C_{ges} \cdot U_q$$

Gegeben: Gesamtspannung Gesucht: Feldstärken in den einzelnen Schichten

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \cdot d_2 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r3}} \cdot d_3} \quad E_2 = E_1 \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \quad E_3 = E_1 \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r3}}$$

Gegeben: Max. zul. Feldstärken der einzelnen Schichten Gesucht: Max. zul. Gesamtspannung

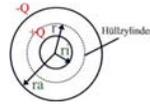
$$U_{max} = \frac{D_{zul}}{\epsilon_0} \left(\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\epsilon_{r3}} \right)$$

Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \vec{D} d\vec{A}}{\int \vec{E} ds} = \frac{\oint \epsilon \vec{E} d\vec{A}}{\int \vec{E} ds} \quad \text{Einheit } [C] = \left[1 \frac{As}{V} = 1F \right] \text{ (Farad)}$$

Plattenskondensator: $U = E \cdot d \wedge Q = D \cdot A \Rightarrow C = \frac{\epsilon A}{d}$

Zylinderkondensator: Voraussetzung: $l \gg r_a$ $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$



Kugelkondensator:

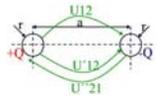


$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi \epsilon}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} = \frac{4\pi \epsilon r_a r_i}{r_a - r_i}$$

Sonderfall: $r_a \gg r_i : C = 4\pi \epsilon r_i$

Kapazität einer Kugel im freien Raum ($r_i = \text{Kugelradius}$)

Doppelleitung:



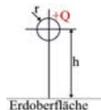
Allgemein.: $E_{Zyl} = \frac{Q}{2\pi \epsilon l r}$

Überlagerung: $U_{12} = U'_{12} - U'_{21} = \frac{Q}{\pi \epsilon l} \cdot \ln\left(\frac{a-r}{r}\right)$

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\pi \epsilon l}{\ln\left(\frac{a-r}{r}\right)}$$

Kapazität einer Einfachleitung gegen eine leitende Oberfläche:

Vorraussetzung: $h \gg r$
Anwendung des Spiegelprinzips



$$C = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)}$$

Schaltungen von Kondensatoren:

Parallelschaltung:

$$Q_{1/2} = C_{1/2} \cdot U \quad Q_{ges} = Q_1 + Q_2 = U(C_1 + C_2) = U \cdot C_{ges}$$

$$C_{ges} = \sum_1^n C_k \quad \frac{Q_k}{Q_{ges}} = \frac{C_k}{C_{ges}}$$

Reihenschaltung:

Wenn C_1 und C_2 zu Beginn des Ladevorgangs ungeladen sind, ist nach dem Laden:

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad U = U_1 + U_2$$

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_1^n \frac{1}{C_k} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} \quad \frac{U_1}{U} = \frac{C_{ges}}{C_1}$$

Sonderfall: nur zwei Kondensatoren in Reihe $C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

Sonderfall: n-gleiche Kondensatoren in Reihe $C_{ges} = \frac{C}{n}$

Reihenschaltung von Kondensatoren mit versch. Ladungen ($Q_1 \neq Q_2$)

Da die Kapazität unabhängig von der Ladung und der Spannung ist, beträgt die Ersatzkapazität

$$C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \text{ Damit ist die an den Klemmen Entnehmbare Ladung: } Q_e = C_e \cdot U$$

Nach der Entnahme ist die Spannung zwischen den Klemmen 0, die Teilkapazitäten C_1 / C_2 weisen jedoch noch Restladungen auf: (Die Summe der Restspg. muss dabei 0 sein!)

$$Q'_1 = Q_1 - Q_e \quad Q'_2 = Q_2 - Q_e \quad U'_1 = \frac{Q'_1}{C_1} \quad U'_2 = \frac{Q'_2}{C_2}$$

Die Reihenschaltung wird mit $Q_1 \neq Q_2$ wird an eine Netzspg. U_N angebracht. Welche Ladung wird dabei

dem Netz entnommen? mit $U'_{1/2} = \frac{Q'_{1/2}}{C_{1/2}}$

$$Q_{Netz} = C_e \cdot \Delta U = C_e (U_N - U) \text{ dann ist } Q'_{1/2} = Q_{1/2} + Q_{Netz}$$

Parallel zur Reihenschaltung mit $Q_1 \neq Q_2$ wird ein Kondensator C_3 geschaltet, der zuvor an der Spannung U_3 geladen wurde. Welche res. Spannung stellt sich dabei an der Parallelschaltung ein?

$$U_{res} = \frac{Q_{res}}{C_{res}} = \frac{Q_e + Q_3}{C_e + C_3}$$

Energie im elektrostatischen Feld:

Für die el. Arbeit gilt, wenn U und I konst.: $W = U \cdot I \cdot t = Q \cdot U$

Laden eines Kondensators (Strom und Spg. sind dabei zeitabhängig):

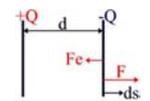
$$dW_e = u idt = u dq \quad Q = CU \text{ (im stationären Zustand)} \quad dq = C du \text{ (im instationären Fall)}$$

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} \quad W_e = \int_{t=0}^{t=t_1} u_c(t) \cdot i_c(t) dt \text{ (Energieänderung im Zeitintervall } 0 \leq t \leq t_1)$$

Energiedichte im elektrostatischen Feld: $\frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$

Kraftwirkung zwischen den geladenen Kondensatorplatten:

$$F = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{ds} \quad F_e = F = \frac{1}{2} \frac{\epsilon A}{d^2} U^2$$



Ausgleichsvorgang beim Kondensator (Spg., Strom u. Ladung sind zeitlich veränderlich):

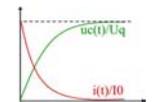
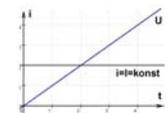
$$i_c = C \frac{du_c}{dt} \quad u_c = \frac{1}{C} \int idt + U_0$$

a) Laden eines Kondensators mit konstantem Strom $u_c = \frac{1}{C} \cdot I \cdot t + U_0$

b) Laden eines Kondensators über einen Widerstand
 $U_q = \tau \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c$ mit $R \cdot C = \tau$ (Zeitkonstante)

$$u_c(t \geq 0) = U_q \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ (Spannung am Kondensator)}$$

$$i_c(t \geq 0) = C \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} U_q = \frac{U_q}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ (Strom beim Kondensator)}$$



Stationäres Strömungsfeld in Leitern:

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} ds = \varphi_1 - \varphi_2 \quad I = \int \vec{S} dA \quad \oint \vec{S} dA = 0 \text{ (KNP-Satz)}$$

für das Homogenfeld gilt: $E = \frac{U}{d}$ und $S = \frac{I}{A}$

Zusammenhang zwischen der el. Feldstärke und der Stromdichte (S):

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U \kappa A}{l} \Rightarrow \frac{I}{A} = \kappa \frac{U}{l} \Rightarrow S = \kappa \cdot E \quad \text{mit } R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

Ermittlung des Leitwertes aus der Kapazität der Elektrodenanordnung:

$$\text{Kapazität } C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \epsilon \vec{E} dA}{\int \vec{E} ds} \quad \text{Leitwert } G = \frac{I}{U} = \frac{\int \kappa \vec{E} dA}{\int \vec{E} ds}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\kappa} \Rightarrow G = \frac{\kappa}{\epsilon} \cdot C$$

Bsp.: a) Plattenkondensator: $C = \frac{\epsilon A}{d} \quad G = \frac{\kappa}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon A}{d} = \frac{\kappa A}{d}$

b) Isolationswert eines Einleiterkabels: $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)} \quad G = \frac{2\pi\kappa l}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}$

$$R_{\text{isol.}} = \frac{1}{G} = \frac{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}{2\pi\kappa l}$$

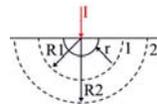
Kugelerder: $S = \frac{I}{4\pi r^2} \quad E = \frac{S}{\kappa} = \frac{I}{4\pi\kappa r^2}$

Übergangswiderstand $R_V = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\kappa r_0}$



Halbkugelerder: $S = \frac{I}{2\pi r^2} \quad E = \frac{S}{\kappa} = \frac{I}{2\pi\kappa r^2}$

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{I}{2\pi\kappa} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\kappa} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



Magnetisches Feld

Magnetische Feldstärke \vec{H} : $H = \frac{I \cdot N}{l} \quad [H] = \left[\frac{1 \text{ A}}{\text{m}} \right]$ wobei N Windungszahl und l Leiterlänge

Magnetische Spannung V: Im Homogenfeld gilt $V = H \cdot l \quad [V] = [1 \text{ A}]$

Magnetischer Fluss Φ und magn. Flussdichte (Induktion) \vec{B} :

Der magn. Fluss wird dargestellt durch die Gesamtheit der magn. Feldlinien. Er beschr. einen Zustand $[\Phi] = [1 \text{ Vs} = 1 \text{ Wb}]$ (Weber)

Die Flächendichte des magn. Flusses bezeichnet man als magn. Flussdichte (Induktion)

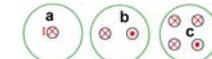
Allg. gilt: $\Phi = \int_A \vec{B} dA = \int_A B \cos \alpha dA \quad B = \frac{\Phi}{A} \quad [B] = \left[1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T} \right]$ (Tesla)

Zusammenhang zwischen der magn. Feldstärke und der magn. Flussdichte: $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ wobei $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ (Permeabilität des Vakuums) μ_r (Permeabilitätszahl (Stoffeinfluss))

- Stoffunterteilung: a) diamagnetische Stoffe $\mu_r < 1$ (z.B. Cu, Ag, H₂O) } $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ (da $\mu_r \approx 1$)
 b) paramagnetische Stoffe $\mu_r > 1$ (z.B. Al, Luft) }
 c) ferromagnetische Stoffe $\mu_r \gg 1 \quad \mu_r = f(H)$ (siehe Hystereseschleife)
 Koerzitivfeldstärke klein \rightarrow magn. Weich ; Remanenz klein \rightarrow magn. Hart

Durchflutung, Durchflutungsgesetz: $\Phi = \frac{I \cdot N}{\mu \cdot A} = \frac{\Theta}{R_m} \quad \Theta = I \cdot N$ (Durchflutung, magn. Erregung)



$R_m = \frac{l}{\mu \cdot A}$ (magn. Widerstand) $[R_m] = \left[1 \frac{\text{m}}{\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \text{m}^2} = 1 \frac{\text{A}}{\text{Vs}} = \frac{1}{H} \right]$ a) $\Theta = I$ b) $\Theta = I - I = 0$

c) $\Theta = I_1 + I_2 - I_3 + I_4$

$\Lambda_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu \cdot A}{l} \quad [\Lambda_m] = \left[1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ H} \right]$ (magn. Leitwert)

Reihenschaltung von magn. Widerständen: $\Theta = \Phi R_{m1} + \Phi R_{m2} = V_1 + V_2$ (vgl. el. Stromkreis $I \cdot R = U$)

Durchflutungsgesetz: $\Theta = \sum_1^n V_k = \oint \vec{H} d\vec{l} \quad \Theta = \sum_1^n H_k \cdot l_k$

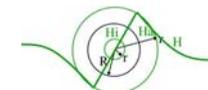
Berechnung von magn. Feldern: (Voraussetzung: $\mu_r = \text{konst.} = 1$) $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r^2} \cdot (\vec{e}_t \times \vec{r})$ Außerhalb Leiter

Mit \vec{e}_t : Einheitsvektor der pos. Stromrichtung; \vec{r} : Vektor des Abstands $\vec{H} = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot (\vec{e}_t \times \vec{r})$ Innerhalb

a) Magnetfeld eines stromdurchflossenen Einzelleiters

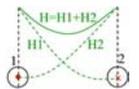
$H_a = \frac{I}{2\pi r} \sim \frac{1}{r} \quad H_{a \text{ max}} = \frac{I}{2\pi R} \quad B_a = \mu_0 \cdot H_a$

$H_i = I \cdot \frac{r}{2\pi R^2} \sim r \quad H_{i \text{ max}} = \frac{I}{2\pi R} \quad B_i = \mu_0 \cdot H_i$



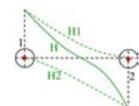
b) Magnetfeld zweier paralleler mit entgegengesetzter Stromrichtung durchflossener Leiter

$H_{1/2} = \frac{I}{2\pi r_{1/2}} \quad H = H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$



c) Magnetfeld zweier paralleler mit gleicher Stromrichtung durchflossener Leiter

$H_{1/2} = \frac{I}{2\pi r_{1/2}} \quad H = H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$



d) Magnetfeld über den Querschnitt eines Koaxialkabels

$r \leq r_i: H_1 = I \frac{r}{2\pi r_i^2} \quad r_i \leq r \leq R_i: H_2 = \frac{I}{2\pi r} \quad R_i \leq r \leq R: H_3 = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{R_o^2 - r^2}{R_o^2 - R_i^2} \quad r \geq R_o: H_4 = 0$

e) Magn. Fluss in einem konzentrischen Ring um einen stromdurchflossenen Leiter

$$\Phi = \int_A B dA = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right) \quad (\text{magn. Fluss im Ring})$$

f) Magn. Fluss zwischen den beiden Leitern einer stromdurchfl. Doppelleitung der Länge l

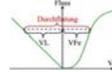
$$\Phi_{1/2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-r_0}{r_0}\right) \quad \Phi_{\text{ges}} = 2 \cdot \Phi_{1/2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-r_0}{r_0}\right)$$

Magnetische Kreise mit Eisen

a) Geschlossener Eisenkreis: $H_{Fe} = \frac{\Theta}{l_{Fe}} \rightarrow \text{M.K.} \rightarrow B_{Fe} \quad \Phi_{Fe} = A_{Fe} \cdot B_{Fe} \quad V_{Fe} = H_{Fe} \cdot l_{Fe}$

b) Eisenkreis mit Luftspalt: $\Theta = I \cdot N = V_{Fe} + V_L = H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_L \cdot \delta \quad (\delta = \text{Luftspalt})$

Aufgabenstellungen: a) $\Phi \rightarrow A_{Fe} \rightarrow B_{Fe} \rightarrow \text{M.K.} \rightarrow H_{Fe} \rightarrow l_{Fe} \rightarrow V_{Fe} \rightarrow \Theta = N \cdot I$



b) $\Phi \rightarrow A_L \rightarrow B_L \rightarrow \mu_0 \rightarrow H_L \rightarrow \delta \rightarrow V_L \rightarrow \Theta = N \cdot I$

Verzweigte magn. Kreise: KNP-Satz: $\sum \Phi_k = 0$ Maschensatz: $\sum_{1 \dots N} \Theta_k = \sum_{1 \dots m} V_i = \sum_{1 \dots m} H_i \cdot l_i$

Analogien:

Durchflutung Θ	Quellspannung U_g
Magn. Fluss Φ	Strom I
Magn. Wid. R_m	El. Wid. R
Magn. Spg. $V_k = H_k \cdot l_k$	El. Spg. $U_k = E_k \cdot l_k$

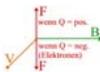
Kräfte im mag. Feld:

a) Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im mag. Feld: $F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha$ $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$
3 Finger Regel / Der Rechten Hand

b) Kraft auf im Magnetfeld bewegte Ladungen: $F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha$ mit $I = \frac{Q}{t} = \frac{n \cdot e \cdot A \cdot l}{t}$ (n = Dichte der

Ladungsträger (cm^3); e = Elementarladung; A = Leiterquerschnitt; l = Leitungslänge im Magnetfeld)

$$\frac{l}{t} = v \quad (\text{Geschw. der Ladungsträger}) \Rightarrow F = n \cdot e \cdot A \cdot l \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha \Rightarrow \underbrace{F = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha}_{\text{Lorentzkraft}}$$



$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

c) Kraft zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern: $F_1 = F_2 = F = I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi a}$ Richtung:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

Induktionsgesetz:

a) Bewegung eines Leiters im ruhenden Magnetfeld: $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} \quad E_i = v \cdot B \cdot \sin \alpha$

$$U_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBl \sin \alpha = -U_g \quad \text{Spg. zwischen den Leiterenden}$$

b) Hallspannung: $U_H = R_H \cdot \frac{I \cdot B}{d} \quad R_H = \frac{\mu}{\kappa}$ (Hallkonstante)

c) Ruhende Leiterschleife im zeitl. veränderl. Magnetfeld: $u_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{-d\Psi}{dt} = -u_g$

d) Erzeugung einer Wechselspannung: $u_i = \underbrace{2 \cdot a \cdot r \cdot N \cdot \omega \cdot B}_{u_i} \cdot \sin(\omega t)$

e) Unipolarmaschine: $u_i = B \cdot \pi \cdot n \cdot R^2$

Induktivität:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N^2}{R_m} \quad [L] = \left[1 \frac{Vs}{A} = 1H \right] \quad (\text{Henry})$$

$$u_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{-di}{dt} = -u_l \quad R_m = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

$$\text{Ringspule: } L = \frac{N^2 \cdot \mu \cdot A}{l_m} \quad \text{Doppelleitung: } L_{\text{ges}} = L_a + 2L_l = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \left[\ln\left(\frac{a-r}{r}\right) + \frac{1}{4} \right]$$

Gegeninduktivität und Streuung:

$$\text{Gegeninduktivität: } M_{12} = M_{21} = M = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_{m12}} \quad \text{Selbstinduktionsspg.: } u_{i1/2} = -L_{1/2} \cdot \frac{di_{1/2}}{dt}$$

$$\text{Gegeninduktionsspg.: } u_{i1/2/21} = -M \cdot \frac{di_{1/2}}{dt} \quad \text{Gesamtfluss: } \Phi_1, \Phi_2$$

$$\text{Streufluss: } \Phi_{\sigma 1}, \Phi_{\sigma 2} \quad \Phi_1 = \Phi_{12} + \Phi_{\sigma 1} \quad \Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{\sigma 2}$$

$$\text{Streufaktor: } \sigma_{1/2} = \frac{\Phi_{\sigma 1/2}}{\Phi_{1/2}} \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \approx \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\text{Streuinduktivitäten: } L_{\sigma 1/2} = \frac{N_{1/2} \cdot \Phi_{\sigma 1/2}}{I_{1/2}} = \sigma_{1/2} \cdot L_{1/2}$$

$$\text{Kopplungsfaktor: } k_m = \sqrt{\frac{\Phi_{12} \cdot \Phi_{21}}{\Phi_1 \cdot \Phi_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \quad \text{Streufaktor: } \sigma = 1 - k_m^2$$

$$\text{Elektronen im E- und B-Feld: } \vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$